

HÄNNI und Herrn Dr. H. WINZELER für viele fruchtbare Diskussionen, Herrn Professor G. P. S. OCCHIALINI und Herrn Professor C. HAENNY für die leihweise Überlassung eines Teiles der Platten. Mein weiterer Dank gilt den Scannerinnen der Universität Bern für die Auffindung der hier beschriebenen Ereignisse und für die Hilfe bei der mikroskopischen Arbeit. Die Exposi-

tion der Platten wurde vom Office of Naval Research durchgeführt, wofür noch besonders Herrn Dr. A. ROBERTS gedankt sei. Die finanziellen Mittel für die Emulsionen wurden vom Schweizer Nationalfonds bewilligt, ein Teil der personellen Mittel von der Deutschen Forschungsgemeinschaft.

# Numerische Berechnung der Störung einer unendlich ausgedehnten scheibenförmigen Neutronensonde nach der Transporttheorie

Von H. MEISTER

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen  
(Z. Naturforsch. 11 a, 579—585 [1956]; eingegangen am 22. März 1956)

Es wird die Winkelverteilung des Neutronenfeldes in der Umgebung einer unendlich ausgedehnten Sonde sowie deren Aktivierungs- und Dichtestörung in Abhängigkeit von der Sondendicke berechnet nach einem Verfahren, das von WICK für ein isotropes Streugesetz angegeben worden ist. Die Ergebnisse werden mit den nach der elementaren Diffusionstheorie gefundenen verglichen.

Nach der elementaren Diffusionstheorie wurde von VIGON und WIRTZ<sup>1</sup> für eine unendlich ausgedehnte Scheibensonde als Dichtestörung

$$\kappa(z) = \frac{\varrho_0 - \varrho(z)}{\varrho_s} = \frac{3}{2} \frac{\Phi_0(\mu \delta)}{2 - \Phi_0(\mu \delta)} \frac{L}{\lambda_t} e^{-z/L} \quad (1)$$

gefunden ( $\varrho_0$  = ungestörte Neutronendichte,  $\varrho(z)$  = durch die Sonde gestörte Dichte,  $\varrho_s$  = Dichte an der Sondenoberfläche) und als Aktivierungsstörung

$$\kappa_C = \frac{C_0 - C}{C} = \left\{ \frac{3}{4} \frac{L}{\lambda_t} - \frac{1}{2} \right\} \Phi_0(\mu \delta) \quad (2)$$

( $C_0$  = die dem ungestörten Neutronenfeld entsprechende Aktivierung,  $C$  = wirkliche Aktivierung im gestörten Feld). Hierbei ist  $z$  die Ortskoordinate senkrecht zur Sonderebene,  $\lambda_t$  die Transportweglänge und  $L$  die Diffusionslänge des die Sonde umgebenden Streumediums sowie  $\Phi_0(\mu \delta)$  die von BOTHE<sup>2</sup> angegebene Funktion

$$\Phi_0(\mu \delta) = 1 - (1 - \mu \delta) e^{-\mu \delta} + \mu^2 \delta^2 \text{Ei}(-\mu \delta) \quad (3)$$

der Schichtdicke  $\delta$  und des Absorptionskoeffizienten  $\mu$  der Sondensubstanz. „Unendlich ausgedehnt“ heißt hier, daß die Ausdehnung der Sonde groß gegen die Diffusionslänge ist.

Die elementare Diffusionstheorie beschränkt sich bei der Entwicklung des differentiellen Neutronenflusses  $K(z, \vartheta)$  nach Kugelfunktionen auf die beiden ersten Glieder, so daß bei Angabe des Dichtever-

laufes auch die Winkelverteilung des Neutronenfeldes festgelegt ist:

$$K(z, \vartheta) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \varrho v - \lambda_t \frac{d(\varrho v)}{dz} \cos \vartheta \right\}. \quad (4)$$

Dabei ist  $\vartheta$  der Winkel zwischen der Neutronenrichtung und der positiven  $z$ -Achse. Die Absorptionswahrscheinlichkeit für ein Neutron, das die Sonde unter dem Winkel  $\vartheta$  durchsetzt, ist  $e^{-\mu \delta / |\cos \vartheta|}$  bei Vernachlässigung der Streuung in der Sonden-substanz. Wird das Neutronenfeld als symmetrisch zur Sonderebene  $z = 0$  vorausgesetzt, so muß es auf der Sondenoberfläche gegen den Halbraum  $z > 0$  die Randbedingung

$$K(0, \vartheta) = e^{-\mu \delta / |\cos \vartheta|} \cdot K(0, \pi - \vartheta) \quad (0 < \vartheta < \pi/2) \quad (5)$$

erfüllen. Hierzu ist aber der elementare Ansatz Gl. (4) nicht imstande.

Zu einer genaueren Berechnung des Neutronenfeldes in der Sondenumgebung muß daher auf die Transportgleichung

$$\vec{\Omega} \text{grad } K(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \Sigma_{\text{tot}} K(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_{\vec{\Omega}'} \Sigma(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') K(\vec{r}, \vec{\Omega}') d\Omega' \quad (6)$$

( $\vec{r}$  = Ortsvektor,  $\vec{\Omega}$  = Einheitsvektor der Neutronenrichtung,  $\Sigma_{\text{tot}}$  = totaler makroskopischer Wirkungsquerschnitt,  $\Sigma(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}')$  = differentieller Streuquerschnitt) zurückgegriffen werden, die die Winkel-

<sup>1</sup> M. A. VIGON u. K. WIRTZ, Z. Naturforsch. 9 a, 286 [1954].

<sup>2</sup> W. BOTHE, Z. Phys. 120, 437 [1943].



abhängigkeit des Neutronenfeldes explizit berücksichtigt. Für den vorliegenden eindimensionalen Fall vereinfacht sich diese Gleichung zu<sup>3</sup>

$$\zeta \frac{\partial \Psi(z, \zeta)}{\partial z} + \Sigma_{\text{tot}} \Psi(z, \zeta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \Sigma_l P_l(\zeta) \int_{-1}^{+1} \Psi(z, \zeta') P_l(\zeta') d\zeta', \quad (7)$$

wobei  $2\pi K(z, \vartheta) = \Psi(z, \zeta)$  und  $\cos \vartheta = \zeta$  gesetzt wurde. Der differentielle Streuquerschnitt  $\Sigma(\Omega, \Omega')$  in Gl. (6) hängt nur vom Cosinus  $(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') = \zeta_0$  des Streuwinkels ab und ist in Gl. (7) bereits nach Kugelfunktionen  $P_l(\zeta_0)$  entwickelt worden:

$$\Sigma_l = 2\pi \int_{-1}^{+1} \Sigma(\zeta_0) P_l(\zeta_0) d\zeta_0.$$

Berücksichtigt man nur die beiden ersten Glieder

$$\Sigma_0 = 2\pi \int_{-1}^{+1} \Sigma(\zeta_0) d\zeta_0 = \Sigma_s,$$

$$\Sigma_1 = 2\pi \int_{-1}^{+1} \Sigma(\zeta_0) \zeta_0 d\zeta_0 = \bar{\zeta}_0 \Sigma_s, \quad (8)$$

( $\Sigma_s$  = makroskopischer Streuquerschnitt,  $\bar{\zeta}_0$  = mittlerer Cosinus des Streuwinkels) und wählt die mittlere freie Weglänge  $\lambda_{\text{tot}} = 1/\Sigma_{\text{tot}}$  als Längeneinheit mit

$$\alpha = \Sigma_a / \Sigma_{\text{tot}} = \lambda_{\text{tot}} / \lambda_a, \quad (9)$$

so lautet die Transportgleichung

$$\zeta \frac{\partial \Psi(z, \zeta)}{\partial z} + \Psi(z, \zeta) = \frac{1-\alpha}{2} \left\{ \int_{-1}^{+1} \Psi(z, \zeta') d\zeta' + 3 \zeta \bar{\zeta}_0 \int_{-1}^{+1} \zeta' \Psi(z, \zeta') d\zeta' \right\}. \quad (10)$$

1. Mit verhältnismäßig geringem Rechenaufwand kann man eine gute Näherungslösung dieser Integro-differentialgleichung gewinnen, wenn man die Integrale nach dem Mittelwertverfahren durch Summen diskreter Funktionswerte approximiert<sup>4</sup>. An Stelle der Funktion  $\Psi(z, \zeta)$  der Orts- und Winkelvariablen werden  $2n$  Funktionen  $\Psi_i(z)$  ( $i = \pm 1 \dots \pm n$ ) der Ortskoordinate  $z$  eingeführt, die den Neutronenfluß an der Stelle  $z$  mit der Richtung  $\zeta$  im Intervall  $\Delta\zeta_i$  um  $\zeta_i$  angeben. Die Integrale in Gl. (10) werden dann durch gewogene Summen der  $\Psi_i$  dargestellt:

$$\int_{-1}^{+1} \Psi(z, \zeta') d\zeta' = \sum_{\substack{j=-n \\ j \neq 0}}^{+n} a_j \Psi_j(z); \quad \int_{-1}^{+1} \zeta' \Psi(z, \zeta') d\zeta' = \sum_{\substack{j=-n \\ j \neq 0}}^{+n} a_j \zeta_j \Psi_j(z). \quad (11)$$

Dabei erfüllen die Gewichtungsfaktoren  $a_i$  unter anderem die Relationen<sup>5</sup>

$$\sum_{i=1}^n a_i = 1, \quad \sum_{i=1}^n a_i \zeta_i^2 = 1/3.$$

Die Transportgleichung (10) geht dadurch in ein System von  $2n$  linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung über:

$$\zeta_i \frac{d\Psi_i(z)}{dz} + \Psi_i(z) = \frac{1-\alpha}{2} \left\{ \sum_{\substack{j=-n \\ j \neq 0}}^{+n} a_j \Psi_j(z) + 3 \zeta_i \bar{\zeta}_0 \sum_{\substack{j=-n \\ j \neq 0}}^{+n} a_j \zeta_j \Psi_j(z) \right\} \quad (i = \pm 1 \dots \pm n). \quad (12)$$

Durch den Exponentialansatz  $\Psi_i(z) = c_i e^{-\kappa z}$  läßt sich dieses System auf das lineare Gleichungssystem für die  $c_i$

$$(1 - \kappa \zeta_i) c_i = \frac{1-\alpha}{2} \left\{ \sum_{\substack{j=-n \\ j \neq 0}}^{+n} a_j c_j + 3 \zeta_i \bar{\zeta}_0 \sum_{\substack{j=-n \\ j \neq 0}}^{+n} a_j \zeta_j c_j \right\} \quad (i = \pm 1 \dots \pm n) \quad (13)$$

zurückführen, das sich leicht lösen läßt, da die Summen auf der rechten Seite nicht von  $i$  abhängen. Setzt man

$$\frac{1-\alpha}{2} \sum_{\substack{j=-n \\ j \neq 0}}^{+n} a_j c_j = C, \quad \frac{3(1-\alpha)}{2} \bar{\zeta}_0 \sum_{\substack{j=-n \\ j \neq 0}}^{+n} a_j \zeta_j c_j = B, \quad (14)$$

<sup>3</sup> S. GLASSTONE u. M. C. EDLUND, The Elements of Nuclear Reactor Theory, MacMillan, London 1953, p. 389.

<sup>4</sup> G. C. WICK, Z. Phys. **121**, 702 [1943].

<sup>5</sup> FR. A. WILLERS, Methoden der praktischen Analysis, de Gruyter, Berlin 1950.

so können die Unbekannten  $c_i$  durch die gemeinsamen Größen  $C$ ,  $B$  und  $\kappa$  ausgedrückt werden:

$$c_i = \frac{C + \zeta_i B}{1 - \zeta_i \kappa}. \quad (15)$$

Es soll zunächst die Abfallkonstante  $\kappa$  der Exponentialfunktion so bestimmt werden, daß das Gleichungssystem (13) eine nichttriviale Lösung für die Unbekannten  $c_i$  hat. Dies ist nach Gl. (15) genau dann der Fall, wenn die Konstanten  $C$  und  $B$  nicht beide verschwinden. Durch Einsetzen von Gl. (15) in Gl. (13) ergibt sich die Beziehung

$$\frac{1-\alpha}{2} \left\{ \sum_{j=-n}^{+n} \frac{a_j (C + \zeta_j B)}{1 - \zeta_j \kappa} + 3 \zeta_i \zeta_0 \sum_{j=-n}^{+n} \frac{a_j \zeta_j (C + \zeta_j B)}{1 - \zeta_j \kappa} \right\} = C + \zeta_i B,$$

die für alle  $\zeta_i$  identisch erfüllt sein muß. Koeffizientenvergleich in bezug auf  $\zeta_i$  führt auf das homogene Gleichungssystem für die beiden Unbekannten  $C$  und  $B$ :

$$\begin{aligned} C \left( \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{1 - \zeta_j^2 \kappa^2} - \frac{1}{1-\alpha} \right) + B \sum_{j=1}^n \frac{a_j \zeta_j^2 \kappa}{1 - \zeta_j^2 \kappa^2} &= 0, \\ C \sum_{j=1}^n \frac{a_j \zeta_j^2 \kappa}{1 - \zeta_j^2 \kappa^2} + B \left( \sum_{j=1}^n \frac{a_j \zeta_j^2}{1 - \zeta_j^2 \kappa^2} - \frac{1}{3 \zeta_0 (1-\alpha)} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Dabei wurde vorausgesetzt, daß die Werte der Winkelvariablen  $\zeta_j$  symmetrisch zu  $\zeta=0$  gewählt worden sind ( $\zeta_{-j} = -\zeta_j$ ), und es wurden je zwei entsprechende Summanden zusammengefaßt.

Die Konstanten  $C$  und  $B$  können nur dann gleichzeitig von Null verschieden sein, wenn die Determinante des Systems (16) verschwindet. Aus dieser Forderung ergibt sich nach elementarer Umrechnung die Gleichung

$$(1-\alpha) \sum_{j=1}^n \frac{a_j (1 + 3 \zeta_0 \zeta_j^2 \alpha)}{1 - \zeta_j^2 \kappa^2} = 1. \quad (17)$$

Dies ist die gesuchte Bestimmungsgleichung für den Parameter der Exponentialfunktion. Wie man leicht sieht, hat diese Gleichung  $n$ -ten Grades genau  $n$  positiv-reelle Wurzeln für  $\kappa^2$ , liefert also  $n$  Paare von  $\kappa$ -Werten, die sich jeweils nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden. Die allgemeine Lösung setzt sich daher additiv aus  $2n$  Exponentialfunktionen mit den entsprechenden Abfallkonstanten  $\kappa_k$  zusammen:

$$\Psi_i(z) = \sum_{k=-n}^{+n} c_{ik} e^{-\kappa_k z}, \quad c_{ik} = \frac{C_k + \zeta_i B_k}{1 - \zeta_i \kappa_k}.$$

Die von der Wurzel  $\kappa_k$  abhängigen Koeffizienten  $c_i$ ,  $C$  und  $B$  haben dabei einen zusätzlichen Index  $k$  erhalten ( $k = \pm 1 \dots \pm n$ ).

Durch das Gleichungssystem (16) ist für ein bestimmtes  $\kappa_k$  das Verhältnis

$$\beta_k = \frac{B_k}{C_k} = \frac{3 \zeta_0 \sum_{j=1}^n \frac{a_j \zeta_j^2 \kappa_k}{1 - \zeta_j^2 \kappa_k^2}}{\frac{1}{1-\alpha} - 3 \zeta_0 \sum_{j=1}^n \frac{a_j \zeta_j^2}{1 - \zeta_j^2 \kappa_k^2}} \quad (18)$$

festgelegt. Der Wert des Koeffizienten  $C_k$  bleibt noch frei verfügbar. Die allgemeine Lösung hat daher die Form

$$\Psi_i(z) = \sum_{k=-n}^{+n} C_k \gamma_{ik} e^{-\kappa_k z}, \quad \gamma_{ik} = \frac{1 + \zeta_i \beta_k}{1 - \zeta_i \kappa_k}. \quad (19)$$

Durch Vorgabe eines bestimmten Streumediums mit

$$\frac{1}{1-\alpha} = \frac{\lambda_s}{\lambda_{\text{tot}}}, \quad \zeta_0$$

und Wahl der Neutronenrichtungen  $\zeta_i$  mit den zugehörigen Gewichtungsfaktoren  $a_i$  sind die Größen  $\kappa_k$ ,  $\beta_k$  und  $\gamma_{ik}$  ein für allemal festgelegt. Für ein spezielles Problem sind dann nur die Koeffizienten  $C_k$  an die geforderten Randbedingungen anzupassen. Die Rechnung vereinfacht sich natürlich sehr wesentlich für den Fall isotroper Streuung ( $\zeta_0=0$ ), wie er z. B. bei Wick<sup>4</sup> durchgeführt worden ist. In diesem Fall werden die  $\beta_k=0$ .

Die Genauigkeit dieses Verfahrens ist durch die Genauigkeit gegeben, mit der die Integrale nach dem Mittelwertverfahren dargestellt werden.

2. Nach diesem Verfahren wird nun die Neutronenverteilung an einer unendlich ausgedehnten Sonde bestimmt. Das ungestörte Feld  $\Psi_0$  sei isotrop und unabhängig von  $z$ . Es genügt der zu Gl. (10) gehörigen inhomogenen Gleichung mit einer konstanten räumlichen Quelldichte und wird so normiert, daß der skalare Neutronenfluß  $v \varrho_0 = \int_{-1}^{+1} \Psi_0 d\zeta$  den Wert Eins hat, d. h.  $\Psi_0 = 1/2$  ist.

Der bei Anwesenheit der Sonde in der Ebene  $z=0$  sich einstellende Neutronenfluß setzt sich wegen der Linearität der Transportgleichung additiv zusammen aus dem ungestörten Fluß  $\Psi_0$  und dem „Störfluß“  $\Delta\Psi(z, \zeta)$ , der der homogenen Transportgleichung (10) genügt:

$$\Psi(z, \zeta) = \Psi_0 - \Delta\Psi(z, \zeta). \quad (20)$$

Wegen der Symmetrie der Neutronenverteilung zu  $z=0$  kann man sich auf die Betrachtung des rechten Halbraumes beschränken. Da die ungestörte Neutronenverteilung fest vorgegeben ist, muß sich das Störfeld so einstellen, daß die Randbedingung Gl. (5) an der Sonde erfüllt ist:

$$\begin{aligned} \Delta\Psi(0, \zeta) - e^{-\mu \delta / \zeta} \cdot \Delta\Psi(0, -\zeta) \\ = (1 - e^{-\mu \delta / \zeta}) \Psi_0, \quad (\zeta > 0). \end{aligned} \quad (21)$$

Wird für das Störfeld die allgemeine Lösung Gl. (19) der Transportgleichung eingesetzt, so ergibt sich ein inhomogenes Gleichungssystem zur Bestimmung der freien Konstanten  $C_k$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n C_k (\gamma_{ik} - e^{-\mu \delta / \zeta_i} \cdot \gamma_{-ik}) \\ = (1 - e^{-\mu \delta / \zeta_i}) \Psi_0 \quad (i = 1 \dots n). \end{aligned} \quad (22)$$

Das Störfeld  $\Delta\Psi(z, \zeta)$  muß für hinreichend großes  $z$  gegen Null gehen, daher fallen die Glieder mit negativem  $\kappa$  in der allgemeinen Lösung für  $z > 0$  fort und es ist in Gl. (22) nur über positive  $k$  zu summieren.

Hat man die Konstanten  $C_k$  aus Gl. (22) bestimmt, so ist dadurch der Neutronenfluß nach Gl. (19) festgelegt. Durch einfache Summation erhält man die Neutronendichte

$$\varrho v = \int_{-1}^{+1} \Psi(z, \zeta) d\zeta = \sum_{i=-n}^{+n} a_i \Psi_i(z) \quad (23)$$

und entsprechend die in der Sonde hervorgerufene Aktivierung<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} C &= 2 \cdot \int_{-1}^0 \Psi(0, \zeta) |\zeta| (1 - e^{-\mu \delta / |\zeta|}) d\zeta \\ &= 2 \sum_{i=1}^n a_{-i} \Psi_{-i}(0) |\zeta_i| (1 - e^{-\mu \delta / |\zeta_i|}). \end{aligned} \quad (24)$$

Aus diesen Werten lassen sich die Sondenstörungen nach Gl. (1) und (2) leicht berechnen.

3. Es wurde die Neutronenverteilung an Sonden verschiedener Dicke ( $\mu \delta$  zwischen 0,02 und 1,0) berechnet. Als Streumedium wurde Graphit mit folgenden Eigenschaften zugrunde gelegt:

$$\begin{aligned} \text{Transportweglänge} \quad \lambda_t &= 2,7 \text{ cm} \\ &\quad (\text{entspr. Dichte} = 1,6 \text{ g/cm}^3), \\ \text{Diffusionslänge} \quad L &= 42,9 \text{ cm}, \\ \text{Atomgewicht} \quad A &= 12. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man den mittleren Cosinus des Streuwinkels  $\bar{\zeta}_0$  bei Annahme isotroper Streuung im Schwerpunktsystem unter Vernachlässigung der Anisotropie infolge von Kristallinterferenzen

$$\bar{\zeta}_0 \approx 2/3 A = 0,0556$$

sowie

$$\lambda_s = 2,55 \text{ cm}$$

und

$$\alpha = 0,00124.$$

Zur Festlegung der Richtungscosinus  $\zeta_i$  wurde das  $\zeta$ -Intervall von  $-1$  bis  $+1$  in 8 gleiche Teile geteilt; die  $\zeta_i$ -Werte wurden jeweils in den Mittelpunkt dieser Teilintervalle gelegt. Wegen der Unstetigkeit in der Winkelverteilung für  $\zeta=0$  an der Sondenoberfläche wurden die Integrale (11) für die Intervalle

$$-1 < \zeta < 0 \quad \text{und} \quad 0 < \zeta < +1$$

getrennt dargestellt unter Verwendung der Mittelwertformeln von MACLAURIN<sup>5</sup>. Man erhält dann für die  $\zeta_i$ -Werte und die zugehörigen Gewichtungsfaktoren  $a_i$ :

$$\begin{aligned} \zeta_{\pm 1} &= \pm 0,125, \quad \zeta_{\pm 2} = \pm 0,375, \\ \zeta_{\pm 3} &= \pm 0,625, \quad \zeta_{\pm 4} = \pm 0,875; \\ a_{\pm 1} &= 0,27083, \quad a_{\pm 2} = 0,22917, \\ a_{\pm 3} &= 0,22917, \quad a_{\pm 4} = 0,27083. \end{aligned}$$

Hieraus folgt als charakteristische Gleichung nach (17)

$$x^4 - 284,58 x^3 + 203,72 x^2 - 30,80 x + 0,559 = 0,$$

wobei  $1/\kappa^2 = x$  gesetzt wurde. Mit Hilfe des NEWTONschen Verfahrens ergaben sich schließlich die folgenden  $\kappa$ -Werte:

$$\kappa_1 = 0,059352, \quad \kappa_2 = 1,3952, \quad \kappa_3 = 2,344, \quad \kappa_4 = 6,807.$$

Hieraus wurden die  $\beta_k$

$$\beta_1 = 0,0040, \quad \beta_2 = 0,0001, \quad \beta_3 = 0,0053, \quad \beta_4 = 0,0000$$

und schließlich die  $\gamma_{ik}$  bestimmt (Tab. 1).

$i \backslash k$	1	2	3	4
-4	0,9473	0,4502	0,3262	0,1438
-3	0,9618	0,5341	0,4043	0,1903
-2	0,9768	0,6565	0,5311	0,2815
-1	0,9921	0,8515	0,7729	0,5403
+1	1,0080	1,2113	1,4154	6,707
+2	1,0243	2,0975	8,281	-0,6441
+3	1,0411	7,8144	-2,1577	-0,3073
+4	1,0584	-4,5289	-0,9559	-0,2018

Tab. 1.

Für eine Sonde mit  $\mu\delta=0,12$  lautet das Gleichungssystem (22) mit  $\psi_0=1/2$ :

$$\begin{aligned} 0,6281 C_1 + 0,8852 C_2 + 1,1194 C_3 + 6,500 C_4 &= 0,3086, \\ 0,3150 C_1 + 1,6208 C_2 + 7,895 C_3 - 0,8485 C_4 &= 0,1369, \\ 0,2473 C_1 + 7,3736 C_2 - 2,4914 C_3 - 0,4643 C_4 &= 0,0873, \\ 0,2325 C_1 - 4,9214 C_2 - 1,2403 C_3 - 0,3271 C_4 &= 0,0641 \end{aligned}$$

mit der Lösung:

$$C_1=0,3565, C_2=0,00201, C_3=0,00400, C_4=0,01206.$$

Damit ist die Neutronenverteilung in der Umgebung der Sonde nach Gl. (19) bestimmt. Da die in der Transportgleichung auftretenden Integrale nach dem Mittelwertverfahren mit acht  $\zeta_i$ -Werten genauer als auf

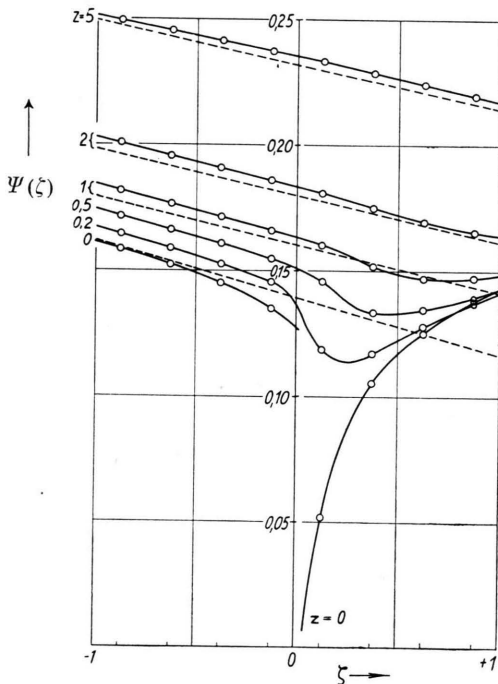


Abb. 1. Winkelabhängigkeit des Neutronenflusses an einer unendlich ausgedehnten Sonde ( $\mu\delta=0,12$ ) in Graphit.  $\zeta=\cos\vartheta$ ; —○—○— nach der Transporttheorie berechnete Werte; — — — Näherung nach der elementaren Diffusionstheorie; Parameter  $z$ : Abstand von der Sondenebene, gemessen in Einheiten von  $\lambda_{\text{tot}}=2,55$  cm.

0,3% dargestellt werden, dürfte die Neutronendichte bzw. die Aktivierung durch das Verfahren genauer als auf 1% gegeben werden.

In Abb. 1 ist der Neutronenfluß  $\Psi(z, \zeta)$  in Abhängigkeit vom Richtungscosinus  $\zeta$  für verschiedene, in freien Weglängen  $\lambda_{\text{tot}}=2,55$  cm gemessene Abstände  $z$  von der Sonde aufgetragen. Der Verlauf der Funktionen wurde durch Interpolation zwischen den berechneten Werten dargestellt. Zum Vergleich wurde derjenige Neutronenfluß eingezeichnet, der sich nach der elementaren Diffusionstheorie Gl. (1) und (4) ergeben würde (gestrichelte Kurve). Unmittelbar an der Sondenoberfläche ( $z=0$ ) ergibt sich nach der Transporttheorie ein stark anisotropes Neutronenfeld. Gemäß der Randbedingung Gl. (5) ist die Zahl der schräg aus der Sonde austretenden Neutronen infolge der Wegverlängerung sehr klein und geht gegen 0 für  $\cos\vartheta=0$ . Die Lösung der elementaren Diffusionstheorie dagegen zeigt ein völlig anderes Verhalten, da die mit dem zweiten Glied abgebrochene Entwicklung Gl. (4) des Neutronenfeldes nicht in der Lage ist, diese starke Anisotropie wiederzugeben. Im Felde der aus der Sonde austretenden Neutronen ( $\cos\vartheta>0$ ) ist die Abweichung erheblich, während das Feld der auf die Sonde auftreffenden Neutronen ( $\cos\vartheta<0$ ) durch die elementare Theorie relativ gut beschrieben wird.

Für größere Abstände von der Sonde ( $z>2$ ) gleicht sich die Anisotropie des Neutronenfeldes allmählich aus, und beide Lösungen gehen bis auf geringe Abweichungen ineinander über (für  $z>2$  sind in der allgemeinen Lösung der Transportgleichung Gl. (19) die Exponentialfunktionen mit den Parametern  $\kappa_2=1,395$ ,  $\kappa_3=2,344$  und  $\kappa_4=6,807$  bereits hinreichend abgefallen, so daß das weitere Verhalten der Lösung allein durch den der Diffusionslänge  $L$  entsprechenden Parameter  $\kappa_1=\lambda_{\text{tot}}/L$  bestimmt wird).

Die Darstellung des transporttheoretischen Dichteverlaufes in Abb. 2 zeigt der elementaren Lösung gegenüber eine zusätzliche Dichtedepression in unmittelbarer Nähe der Sonde ( $z<1$ ), verursacht durch die geringe Durchlässigkeit der Sonde für schräg laufende Neutronen (siehe Abb. 1). Demgemäß ergibt sich an der Sonde eine größere Dichtestörung als nach der elementaren Theorie folgen würde.

Die Aktivierungsstörung sollte aber (zumindest für die unendlich ausgedehnte Sonde) durch die elementare Diffusionstheorie recht gut dargestellt



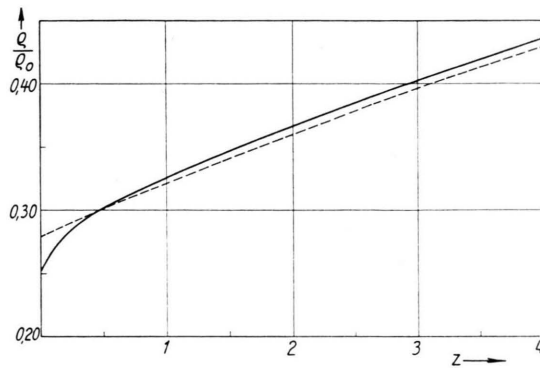


Abb. 2. Dichteverlauf an einer unendlich ausgedehnten Sonde ( $\mu\delta=0,12$ ) in Graphit,  $z$ =Abstand von der Sondenebene, gemessen in Einheiten von  $\lambda_{\text{tot}}=2,55$  cm; ausgezogene Kurve: Transporttheorie; gestrichelte Kurve: Diffusionstheorie.

werden, da der Fluß der auf die Sonde zu gerichteten Neutronen ( $\cos\vartheta < 0$ ) in Abb. 1 von der diffusionstheoretischen Verteilung nicht wesentlich abweicht. Um hierüber einen genaueren Überblick zu erhalten, wurde die für  $\mu\delta=0,12$  angedeutete Rechnung für einige weitere Werte von  $\mu\delta$  durchgeführt. Aus der resultierenden Neutronenverteilung wurden die Dichte- und Aktivierungsstörungen mit Hilfe von Gln. (23) und (24) berechnet und mit den Werten nach Gln. (1) und (2) nach VIGON und WIRTZ verglichen.

Die Ergebnisse wurden in Tab. 2 zusammengestellt und in Abb. 3 in Abhängigkeit von  $\mu\delta$  aufgetragen. Man sieht, daß die aus Gl. (1) nach der elementaren Diffusionstheorie berechnete Dichtestörung um etwa 15% unter den transporttheoretischen Werten liegt, während die Abweichung bei der Aktivierungsstörung nicht größer als 5% ist.

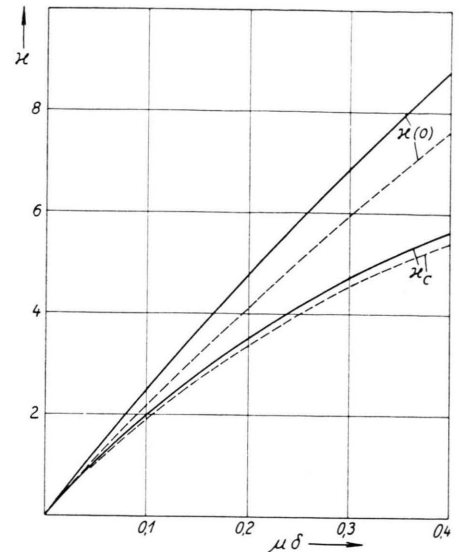


Abb. 3. Dichtestörung  $\kappa(0)$  und Aktivierungsstörung  $\kappa_C$  einer unendlich ausgedehnten Scheibensonde. Ausgezogene Kurven: berechnet nach der Transporttheorie, gestrichelte Kurven: berechnet nach den Gln. (1) und (2) der elementaren Diffusionstheorie.

Hieraus kann man allerdings nicht schließen, daß auch bei einer *endlichen* Scheibensonde die Aktivierungsstörung durch die elementare Diffusionstheorie mit derselben relativen Genauigkeit dargestellt wird. Die Aktivierungsstörung in einem Punkte setzt sich nämlich additiv aus den Beiträgen der einzelnen Sonderelemente zusammen, wobei der Beitrag der entfernteren Sonderelemente durch die elementare Theorie exakt beschrieben wird, nicht aber der Beitrag der näher benachbarten, deren Abstand vergleichbar mit  $\lambda_t$  ist. Dieser Beitrag gewinnt aber an Bedeutung, je kleiner der Sonden-

$\mu\delta$	Transport-Theorie		Diff.-Th.	Transport-Theorie			Diff.-Th.
	$\kappa(0)$	$\kappa(0)$	$\kappa(0)$	$C_0$	$C$	$\kappa_C$	$\kappa_C$
0,020	0,6611	0,513	0,4624	0,01903	0,01323	0,438	0,435
0,050	0,4398	1,274	1,1254	0,04508	0,02187	1,062	1,029
0,070	0,3618	1,764	1,5528	0,06117	0,02497	1,450	1,397
0,100	0,2862	2,494	2,1773	0,08371	0,02825	1,963	1,911
0,120	0,2518	2,971	2,5837	0,09781	0,02969	2,294	2,233
0,150	0,2143	3,666	3,1801	0,11772	0,03109	2,787	2,688
0,200	0,1728	4,79	4,1417	0,14804	0,03293	3,496	3,381
0,300	0,1268	6,89	5,9568	0,19996	0,03503	4,71	4,566
0,400	0,1019	8,81	7,6387	0,2427	0,03662	5,63	5,542
0,500	0,08629	10,59	9,1945	0,2829	0,03737	6,57	6,357
1,000	0,05228	18,13	15,258	0,3903	0,03836	9,17	8,912
$\infty$	0,03516	27,44	23,833	0,5000	0,04032	11,40	11,417

Tab. 2. Dichtestörung  $\kappa(0)$  an der Sondenoberfläche, berechnet nach der Transporttheorie und der elementaren Diffusionstheorie [Gl. (1)], und Aktivierungsstörung  $\kappa_C$ , berechnet nach der Transporttheorie und der elementaren Diffusionstheorie [Gl. (2)].

radius  $R$  ist. Die in einer früheren Arbeit<sup>6</sup> beschriebene Messung der Aktivierungsstörung von Indiumfolien in Paraffin zeigte, daß im Bereich  $R/\lambda_t = 2$  bis 3 die gemessenen Werte um etwa 30% über denen der elementaren Diffusionstheorie liegen.

Eine transporttheoretische Rechnung für den Fall der endlichen Scheibensonde ist sehr aufwendig,

da dann neben 2 Ortskoordinaten auch 2 Winkelvariable auftreten, d. h. das Neutronenfeld in Sondennähe nicht mehr rotationssymmetrisch ist.

Herrn Prof. WIRTZ danke ich für seine wohlwollende Unterstützung.

<sup>6</sup> H. MEISTER, Z. Naturforschg. **10 a**, 669 [1955].

## Röntgen-Wellenfelder in großen Kalkspatkristallen und die Wirkung einer Deformation

Von G. BORRMANN und G. HILDEBRANDT

Aus dem Fritz-Haber-Institut der Max-Planck-Gesellschaft, Berlin-Dahlem

(Z. Naturforschg. **11 a**, 585—587 [1956]; eingegangen am 4. Mai 1956)

Die dem Idealkristall eigentümliche übernormale Durchlässigkeit für RÖNTGEN-Strahlen, welche die v. LAUE-BRAGGSche Interferenzbedingung erfüllen, zeigt sich auch an 3 cm dickem Kalkspat noch sehr deutlich. Störung des Kristallgitters vermöge eines Temperaturgradienten läßt die Reflexe rasch an Stärke verlieren.

Kristallexemplare hoher Wachstumsgüte vermögen interferierende RÖNTGEN-Strahlen um viele Größenordnungen stärker durchzulassen als der normalen Absorption entsprechen würde<sup>1</sup>. Hieraus folgt, daß die Intensität der im Interferenzfall durchgehenden Strahlung empfindlich abnehmen muß, wenn das „ideale“ Gitter durch äußere Eingriffe gestört wird. Wir berichten kurz über den größten von uns bisher gefundenen Unterschied zwischen normaler Durchlässigkeit und Durchlässigkeit im Fall der Interferenz und beschreiben die Wirkung des, experimentell gesehen, wohl einfachsten Eingriffs.

In Abb. 1 ist ein von Spaltflächen begrenzter Kalkspatkristall mit den Kantenlängen  $3\frac{1}{2}$ , 7 und 7 cm im Schnitt dargestellt. Die zur Spaltfläche parallele Netzebene erfüllt die Interferenzbedingung für die von der Röhre kommende Molybdän-K $\alpha$ -Strahlung ( $\lambda = 0,7 \text{ \AA}$ ) in erster Ordnung. Die normale Durchlässigkeit, in Richtung senkrecht zur Oberfläche definiert, berechnet sich zu  $I/I_0 = e^{-\mu D} = e^{-70}$  (oder  $10^{-30}$ ), denn der Absorptionskoeffizient  $\mu$  beträgt  $22 \text{ cm}^{-1}$  nach den Tabellen, und die Dicke ist  $D = 3,2 \text{ cm}$ . Die im dargestellten Interferenzfall gemessene Durchlässigkeit beträgt  $e^{-10}$  (oder  $10^{-4}$ ). (Verglichen wird die Intensität von R im gezeichneten Fall mit der Intensität desselben Reflexes bei

Spiegelung an der Oberfläche, d. h. ohne Absorption [vgl. Anm. <sup>1</sup>, S. 304].) Der Kristall zeigt sich freilich nicht an allen Stellen der Eintrittsfläche so stark übernormal durchlässig, aber doch, mit kleinen Schwankungen, innerhalb großer Bereiche. Da die Formeln der dynamischen Theorie auch in diesem Fall (wie schon früher<sup>3,4</sup>) in die beobachtete Größenordnung der Durchlässigkeit führen, besitzt

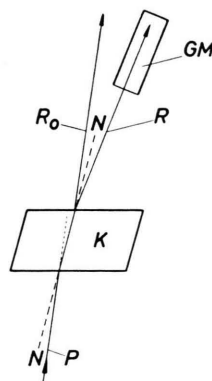


Abb. 1. Versuchsanordnung: P durch Blenden begrenzter Primärstrahl; K Kristall; N Netzebene; R<sub>0</sub>, R Reflexe, die an der Austrittsfläche aus dem Zerfall der Wellenfelder entstehen; GM GEIGER-MÜLLERSches Zählrohr. Von der Fächerbildung im Kristall<sup>2</sup> ist in der Zeichnung abgesehen worden; eingetragen ist nur der Strahl längs der reflektierenden Netzebene.

der Kristall, so dick er ist, in seinen besten Teilen ein RÖNTGEN-optisch nahezu vollkommenes Gitter. Daß es doch Fehler hat, beweisen die erwähnten kleinen Schwankungen der Intensität besser als der Vergleich mit den Formeln, die sich zur Zeit nur

<sup>1</sup> G. BORRMANN, Z. Phys. **127**, 297 [1950].

<sup>2</sup> G. BORRMANN, G. HILDEBRANDT u. H. WAGNER, Z. Phys. **142**, 406 [1955].

<sup>3</sup> P. B. HIRSCH, Acta Cryst. **5**, 176 [1952].

<sup>4</sup> W. H. ZACHARIASEN, Proc. Nat. Acad. Sci., Wash. **38**, 378 [1952].